

Exercice N°1

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = \beta & \text{où } \beta \in [-2, 1[\\ U_{n+1} = \frac{4U_n + 3}{U_n + 6} \end{cases}$$

1/a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $-2 \leq U_n \leq 1$

b) En déduire que pour tout entier naturel n , (U_n) n'est pas constant

c) Etudier la monotonie de (U_n)

2/ Soit (V_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $V_n = 1 + \frac{4}{U_n - 1}$ et on prendra $\beta = -2$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera sa raison q

b) Exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n

3/ a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $1 - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1 - U_n)$

b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $1 - U_n \leq 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$

c) En déduire que pour tout entier naturel k , on a : $1 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^k \leq U_k \leq 1$

4/ Soit $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $n + 1 - 12\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \leq S_n \leq n + 1$

Exercice N°2

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. on pose H le projeté orthogonal de A sur [BC].

On désigne par x la mesure de l'angle \widehat{HOB} .

On suppose que $x \in I =]0, \frac{\pi}{2}[$. on pose $f(x)$: l'aire du triangle ABC

1/a) Exprimer BC et AH en fonction de x

b) Montrer que pour tout x de I on a : $f(x) = (1 + \cos x) \sin x$

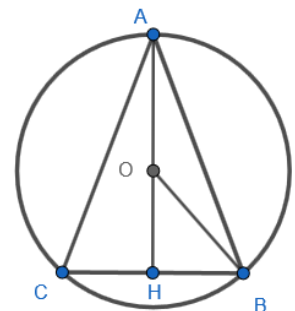
2/a) Montrer que pour tout x de I on a : $f'(x) = (1 + \cos x)(2 \cos x - 1)$

b) Dresser le tableau de variation de f sur I

c) Déterminer x pour la quelle l'aire du triangle est maximale

3/ Construire C_f sur I

4 / On prend $x = \frac{\pi}{3}$. montrer que ABC est un triangle équilatéral



Exercice N°3

Une urne U_1 contient 7 boules indiscernables au toucher, réparties comme suit :
4 blanches numérotées :1, 1, 2, 2 et 3 rouges numérotées :1, 1, 1.

1) On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.

a – Quelles est la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir deux boules de même couleur »

B : « obtenir deux boules portant le même numéro »

b – Calculer : $P(A \cap B)$ puis $P(A \cup B)$. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

2) Une urne U_2 contient 5 boules numérotées : $-1, -1, 0, 1, 1$.

On tire, au hasard, une boule de l'urne U_1 puis une boule de U_2 . On désigne par a le numéro inscrit sur la boule tirée de U_1 et par b celui de la boule tirée de U_2 .

A chaque couple (a, b) obtenu on associe le réel $x = a^2 + b^2$.

Calculer la probabilité de chacun des événements :

E_1 : « avoir $x = 2$ » ; E_2 : «avoir $x = 4$ » ; E_3 : « avoir $x = 5$ » ; E_4 : « avoir $x \geq 1$ »

Question bonus (2pts)

Montrer que pour tout entier naturel n non nul

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$